Annexe : Nombres complexes

Définition 1 (Nombre complexe)**.**
On appelle *nombre complexe* un nombre de la forme

$$z = a + bi$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ et où i est un symbole formel vérifiant la relation $i^2 = -1$.

On note $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des nombres complexes.
Le nombre $a \in \mathbb{R}$ est noté Re(z) est appelé la *partie réelle* de z.
Le nombre $b \in \mathbb{R}$ est noté Im(z) est appelé la *partie imaginaire* de z.
Deux nombres complexes $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$ sont égaux si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$.

Résultat L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ peut être vu comme sous-ensemble de $\mathbb{C}$ en identifiant $a \in \mathbb{R}$ à $a + 0i \in \mathbb{C}$.

On munit l'ensemble $\mathbb{C}$ de deux opérations, *l'addition* $+ \ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et la *multiplication* $\cdot \ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, définies par

$$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$$

et

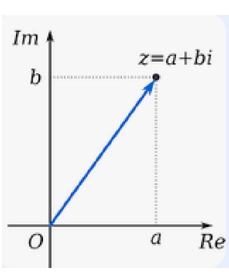
$$(a + bi) \cdot (a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + ba')i$$

Ces opérations prolongent l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$. On peut vérifier que les propriétés de l'arithmétique usuelle dans $\mathbb{R}$ s'étendent aux nombres complexes $\mathbb{C}$. En particulier, la définition de la multiplication est cohérente avec la distributivité :

Exemple

$$(2 - 3i)(4 + 7i) = 8 + 14i - 12i - 21i^2 = 8 + 2i - 21(-1) = -13 + 2i$$

Interprétation géométrique



Lien avec les racines d'un polynôme
On rappelle que pour α complexe ou réel, α est dit une *racine* du polynôme $p(t) \in \mathbb{P}$ si $p(\alpha) = 0$.

Exemple
Soit $p(t) = at^2+bt+c \in \mathbb{P}_2$ un polynôme de degré 2 et soit $\Delta = b^2-4ac$. Alors

1. si $\Delta > 0$, alors le polynôme $p(t)$ admet deux racines réelles distinctes données par $\alpha_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$,
2. si $\Delta = 0$, alors le polynôme $p(t)$ admet une racine unique donnée par $\alpha = \frac{-b}{2a}$,
3. si $\Delta < 0$, alors le polynôme $p(t)$ admet deux racines complexes distinctes données par $\alpha_{1,2} = \frac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Résultat Si α est une racine du polynôme $p(t) \in \mathbb{P}$, alors

$$p(t) = (t-\alpha)q(t)$$

pour un polynôme $q(t) \in \mathbb{P}$ de degré inférieur à celui de $p(t)$.

Théorème fondamental de l'algèbre
Tout polynôme non constant dans $\mathbb{P}$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Conséquence
Tout polynôme $p(t) = a_nt^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1t + a_0$ peut s'écrire sous la forme $p(t) = a_n(t-\alpha_1)\cdots(t-\alpha_n)$ pour des $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ non nécessairement distincts. Les $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont les racines de $p(t)$.